数理解析研究所講究録
358巻 1979年 67-83

集合値関数の半順序に関する極値の可測性について

九大理　　久野 洋

1. 序　集合値関数の可測性やボレル可測選択に関する一般論は、参考文献の[1],[2],[4],[5],[6],[7],[9]等で研究されている。

ここではこれらの研究をもとにして、ユークリッド空間R^qに値を取るベクトル値マルコフ決定過程やベクトル値最適停止問題を考えるときに必要な特殊な形の集合値関数に対する同様の議論を行ないたい。尚ここで得られた結果は[3]の結果を拡張することに役だつ。

2. 定義と用語

今後特に断わらない限りAは可測空間とする。すなわちA上で一つのσ-field $\mathcal{A}$が定義されているものとする。$\mathcal{A}$に属する集合をA上で可測という。$\mathcal{A}$上に完備σ-finite measureが定義されているときにAが完備という。(位相空間，特に距離空間としての完備とは違う点に注意。) Sは距離空間を表わすものとし，$\mathcal{B}(S)$をSの開集合全体から生成されたσ-field

とする。$\mathfrak{B}(S)$に属する集合を（位相的）ボレル集合という。

AからSへの集合値関数Fとは、AからSの部分集合全体への写像のことである。AからSへの集合値関数が、すべての$a\in A$に対して$F(a)$が空集合でない時に多価関数と呼ばれる。AからSへの集合値関数は、すべての開集合$G\subset S$に対して集合$F^{-}(G)=\{a\in A \mid F(a)\cap G\neq\phi\}$が可測集合となるときに可測であると云われる，ここに述べた可測性の定義は[4]，[9]などの中に述べられている可測性の定義と同値であることに注意されたい。Aが位相空間のときには、集合値関数$F: A\to S$に対しFが可測ということは、Aにはボレルσ-field $\mathfrak{B}(A)$を考えているものとする。同様にして，$F: A\times T\to S$に対してFの可測性はいつも積σ-field $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}(T)$上で考えているものとする。$F: A\to S$のボレル可測選択（Borel measurable selector）とは、各々の$a\in A$に対して$f(a)\in F(a)$となるようなボレル可測写像$f: A\to S$のこととする．

Sのすべての空でない閉集合（コンパクト集合）の全体を2^S（$C(S)$）と書く。2^S上の finite topology の定義は E. Michael [8] に従う。すなわち2^S上の finite topology とは$G_1, G_2, \cdots, G_n$をSの開集合として，$\langle G_1, G_2, \cdots G_n\rangle=\{E\in 2^S \mid E\subset \bigcup_{i=1}^{n} G_i$, かつ $E\cap G_i\neq\phi$ for all $i\}$の形をした集合全体を開集合系の基とするような位相のことである。$C(S)$上の finite topology とは2^S上の finite topology が$C(S)$

上に誘導されたものを云う。$\mathbb{P}$をSの部分集合全体に対する性質とする。このとき集合族$\{E\in 2^S \mid E は P\}$ ($\{E\in C(S)\mid E は P\}$) のことを$\underset{E\in 2^S}{\mathbb{E}}(E は P)$ ($\underset{E\in C(S)}{\mathbb{E}}(E は P)$) と書くこともある。集合値関数$F: A\to S$は、すべての$a\in A$に対して$F(a)$が$\mathbb{P}$であるときに$\mathbb{P}$値であると云われる。$F$の定義域とは$\mathrm{dom}F=\{a\in A\mid F(a)\neq\phi\}$であり、$F$のグラフとは$G_r(F)=\{(a,x)\in A\times S\mid x\in F(a)\}$である。$F: A\to S$を閉値(コンパクト値)集合値関数とするとき、$F$は写像$F: A\to 2^S$ (写像$F: A\to C(S)$) と考えることが出来る。両者の相違は、値の空間の表現の相違で区別することにする。

全体を通じてKはq次元ユークリッド空間$\mathbb{R}^q$に於ける原点0を頂点とする凸錐で$K^*\cap(-K^*)=\{0\}$をみたすものとする。ここに$K^*=K\cup\{0\}$のことである。さらにKは少なくとも一つの内点を持つものと仮定しておく。$x, y\in\mathbb{R}^q$に対して$x-y\in K^*$のときに$y\underset{K}{\leqq} x$と定義する。すると$\underset{K}{\leqq}$は$\mathbb{R}^q$上の一つの半順序となる。$K(x)=\{z\mid x\underset{K}{\leqq} z\}$, $K^-(x)=\{z\mid z\underset{K}{\leqq} x\}$と定義する。$K(x)\cap K^-(x)=\{x\}$となることに注意。$K$が閉凸錐のときには、$K+x=K(x)$となるが一般には$K+x\subset K(x)$である。$\mathbb{R}^q$の任意の部分集合$E$に対して$E$の極大点集合$e(E)$と$E$の上限点集合$S(E)$とを次式で定義する。$e(E)=\{p\in E\mid K(p)\cap E=\{p\}\}$, $S(E)=e(\bar{E})$. $F: A\to\mathbb{R}^q$を多価関数として、集合値関数$eF: A\to\mathbb{R}^q$を各々の$a\in A$に対して$(eF)(a)=e(F(a))$で定義し、

集合値関数 $SF : A \to \mathbb{R}^{\delta}$ を各 $a \in A$ に対して $(SF)(a) = S(F(a))$ で定義する。

3、集合値関数の可測性

この § では集合値関数の可測性に関するいくつかの定理を証明なしで列記することにする。

次の定理は Michael [8, Thm. 4.9] によって得られた finite topology に関するよく知られた結果を述べたものである。

定理1（[8]）

(i) S が compact Hausdorff ということと $C(S)$ が compact Hausdorff ということは同値，

(ii) S が距離付け可能ということと $C(S)$ が距離付け可能ということは同値。

$F : A \to S$ をコンパクト値多価関数とする。すると $F : A \to S$ の可測性と $F : A \to C(S)$ の可測性との関連を扱った次の定理は、後で主定理の定理8，定理9，定理10を証明するときに使われる。

定理2（[2]）

S を可分距離空間とし，$F : A \to S$ をコンパクト値多価関数とする。このとき次の(i)と(ii)は同値である。

(i)　$F: A \to \mathcal{S}$ が可測，

(ii)　$F: A \to C(\mathcal{S})$ がボレル可測。

この結果は Debreu [2, Thm. 4·2] によって得られた。

今各々の $F_n: A \to \mathcal{S}$ が可測のとき，$(\bigcup_n F_n)(a) = \bigcup_n F_n(a)$ の式で定義される集合値関数 $\bigcup_n F_n: A \to \mathcal{S}$ も可測となることはすぐわかる．ところが可測集合値関数の可算共通部分 $\bigcap_n F_n: A \to \mathcal{S}$ の可測性はすぐには出てこない。このことをある種の条件の下で保証したのが Rockafellar [9. Cor. 1·3] であり，それは次の定理である．

定理3（[9]）

$(F_i \mid i = 1, 2, \cdots)$ を閉値可測集合値関数の可算族とする。但し各 $F_i: A \to R^g$．すると集合値関数 $F: a \longrightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i(a)$ も可測である．

定理4（[4]）

$F: A \to \mathcal{S}$ が可測であることと，$\overline{F}: A \to \mathcal{S}$ が可測であることは同値である．但し $\overline{F}: A \to \mathcal{S}$ は各々の $a \in A$ に対して，$\overline{F}(a) = \overline{F(a)}$ で定義されているものとする。

この定理4は Himmelberg [4. Prop. 2·6] が与えたものである。

定理5（[1]）

X，Yをそれぞれポーランド空間のボレル集合として，Eを X×Yのボレル集合とする。もし各$x \in X$に対する切片E_xがσ-compactとすると，次の(i)と(ii)が成立する。

(i) $Proj_X(E)$からYへのボレル可測写像fで$Gr(f) \subset E$となるものが存在する。

(ii) $Proj_X(E)$はボレル集合である。

定理5はBrown-Purvesの定理という名でよく知られている[1]の中の定理を修正したものである。

Sが Souslinであるとは，Sがポーランド空間の連続像であるときに云う。

定理6（[4]）

Aが完備（位相的な意味でないことに注意）とし，SをSouslinとして，$F: A \to S$を$Gr(F) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(S)$となるような集合値関数とすると，Fは可測である。

この結果はHimmelberg [4, Thm. 3.4]によって得られた。可測空間$(A, \mathcal{A})$がSouslin演算を許容する（to admit the Souslin operation）とは，可測集合上のSouslin演算で作られた集合が再び可測となるときに云う。([7])

集合値関数 $F: A \to S$ が Souslin 型であるとは、ポーランド空間 P と可測閉値集合値関数 $\Omega: A \to P$ と連続写像 $\varphi: P \to S$ が存在して、すべての $a \in A$ に対して $F(a) = \varphi(\Omega(a))$ となるときに云う。

定理 7 ([7])

$(A, \mathcal{A})$ を Souslin 演算を許容する可測空間とし、S を Souslin $F: A \to S$ を $Gr(F) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(S)$ となる集合値関数とすると、F は Souslin 型となる。

この結果は Leese [7, Lem. 3] で証明されている。

4. $S = \mathbb{R}^q$ の場合の可測性

この§では主定理を証明するのに必要ないくつかの補題を準備しよう。今から x を中心として半径 ε の開球を $U(x, \varepsilon)$ と表わすことにする。さらに A, B を $\mathbb{R}^q$ の部分集合として、

$$d(A, B) = \inf \{|a-b| \mid a \in A, b \in B\}$$ と表わす。

$|a-b|$ の代わりに $d(a, b)$ と書くことにする。

補題 1

K を $\mathbb{R}^q$ の閉凸錐とする。このとき $f(x) = K(x)$ で定義される写像 $f: \mathbb{R}^q \to 2^{\mathbb{R}^q}$ は連続写像である。

証明　$\mathbb{R}^q$ の任意の開集合 G と任意の $x_0 \in f^{-1}(\underset{E \in 2^{\mathbb{R}^q}}{E}(E \subset G))$ に対

して，$\inf\{d(a,b) \mid a\in K(x),\ b\in G^c\}>0$ が成り立つ。ここでその値を δ_{x_0} とおくと，$U(x_0:\frac{\delta_{x_0}}{2})\subset f^{-1}(\underset{E\in 2^{\mathbb{R}^q}}{\mathbb{E}}(E\subset G))$ となる。従って $f^{-1}(\underset{E\in 2^{\mathbb{R}^q}}{\mathbb{E}}(E\subset G))$ が開集合となることがわかった。同様にして $f^{-1}(\underset{E\in 2^{\mathbb{R}^q}}{\mathbb{E}}(E\cap G\neq\phi))$ も開集合となることが示される。従ってこの補題は証明された。

$\mathbb{R}^q$ の一点コンパクト化を $\overline{\mathbb{R}^q}$ で表わすことにする。すると，$\overline{\mathbb{R}^q}$ はコンパクトかつハウスドルフで可分な距離付可能空間となる。Eを $\overline{\mathbb{R}^q}$ の部分集合として，Eの $\overline{\mathbb{R}^q}$ と $\mathbb{R}^q$ における閉包をそれぞれ $\overline{E}$ と $\overline{E}^{\mathbb{R}^q}$ で表わす。特に断わらない限り，$X=\overline{\mathbb{R}^q}$ とおく。

補題2

Kを凸錐とし，$F: A\to\mathbb{R}^q$ をコンパクト値可測多価関数とする。多価関数 $F_1: X\to X$ と集合値関数 $F_2: A\times X\to X$ を次式で定義するとき，どちらもコンパクト値可測となる。

$$\begin{cases} F_1(x)=\overline{K(x)} & \text{for each } x\in\mathbb{R}^q \\ F_1(\infty)=\{\infty\}, \end{cases} \qquad F_2(a,x)=F_1(x)\cap\overline{F(a)} \quad \text{for each } (a,x)\in A\times X$$

証明　φ_1 の $\mathbb{R}^q$ 上への制限 $\varphi_1|\mathbb{R}^q$ が可測であることを示せば十分である。Gを X の任意の開集合として，

$$(\varphi_1|\mathbb{R}^q)^{-}(\underset{E\in C(X)}{\mathbb{E}}(E\subset G))=\{x\in\mathbb{R}^q \mid \overline{K(x)}\subset G\}$$

$$= \begin{cases} \phi & \text{if } G \not\ni \infty \\ \{x \in \mathbb{R}^\ell \mid \overline{K(x)}^{\mathbb{R}^\ell} \subset G - \{\infty\}\} & \text{if } G \ni \infty \end{cases}.$$

補題1によって集合$\{x\in\mathbb{R}^\ell \mid \overline{K(x)}^{\mathbb{R}^\ell}\subset G-\{\infty\}\}$は$\mathbb{R}^\ell$の開集合であるから，$(\varphi_1|\mathbb{R}^\ell)^{-}(\underset{E\in C(X)}{\mathrm{E}}(E\subset G))$は$\mathbb{R}^\ell$の開集合である。同様に$(\varphi_1|\mathbb{R}^\ell)^{-}(\underset{E\in C(X)}{\mathrm{E}}(E\cap G\neq\phi))$も$\mathbb{R}^\ell$の開集合であることがわかる．$F_2$の可測性は、定理3と定理4をあわせ用いるとわかる。

補題3

$(A,\mathcal{A})$を可測空間，Kを開凸錐，$F:A\to\mathbb{R}^\ell$を閉値可測多価関数とする。このとき$\Gamma(a,x)=F(a)\cap K(x)$ for $(a,x)\in A\times\mathbb{R}^\ell$で定義される集合値関数$\Gamma:A\times\mathbb{R}^\ell\longrightarrow\mathbb{R}^\ell$もまた可測集合値関数となる。特に集合$\{(a,x)\in A\times\mathbb{R}^\ell \mid \Gamma(a,x)=\phi\}$は$\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^\ell)$に属する。

証明　$\{d_i : i=1,2,\cdots\}$をKの dense subset とする。すると，$K(x)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{K(d_i)}^{\mathbb{R}^\ell}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{K}^{\mathbb{R}^\ell}(d_i)$となることがKが開集合であることから従う。従って補題1と$F(a)\cap K(x)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\{F(a)\cap\overline{K}^{\mathbb{R}^\ell}(x+d_i)\}$となる事実によって明らかに$\Gamma$は可測である。

補題4

Eを$\mathbb{R}^\ell$の閉部分集合，Kを開凸錐とすれば，極大点集合$e(E)$は閉集合となる。

証明　$\{x_n\}_{n=1,2,\cdots}$ を $e(E)$ の点列とし，$x_0 \in E$ として $x_n \longrightarrow x_0$ と仮定する。今 $x_0 \notin e(E)$ と仮定すると，$y \in E$，$y \neq x_0$，$y \underset{K}{\geqq} y$ となる点 y が存在する。一方 $y \in K+x_0$ で $K+x_0$ は開集合であるから $\delta>0$ が存在して $U(y:\delta) \subset K+x_0$ をみたす。$x_0 \notin U(y:\delta)$ であることに注意。すると n_0 が存在して，すべての $n \geqq n_0$ に対して $x_n \in U(x_0:\delta)$ となるので，$x_{n_0} \underset{K}{\leqq} y$，$y \neq x_{n_0}$ で $y \in E$ となるが、これは x_{n_0} が E の極大点であることに反する。

補題 5

K を閉凸錐とし，$F: A \to \mathbb{R}^q$ を可測集合値関数とする。このとき $\mathrm{dom}\, SF \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^q)$ となる。

証明　$\{d_i : i=1,2,\cdots\}$ を $\mathbb{R}^q$ の dense subset とする。このとき次の(1)式を示そう。

(1)　$$\mathrm{dom}\, SF = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} \{a \in A \mid \phi \neq K(d_i) \cap \overline{F(a)} \subset U(d_i : \tfrac{1}{n})\}$$

この(1)を示す為に，次の(2)で表わされる命題が必要である。

(2)　E を閉集合とし，$x \in e(E)$ とする。このとき任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\delta>0$ が存在して $d(E,\ K(x) \cap U(x:\varepsilon)^c) > \delta$ となる。

(1)式の証明　任意の $a \in \mathrm{dom}\, SF$ に対して $e(\overline{F(a)}) \neq \phi$ であるから，$x \in e(\overline{F(a)})$ が取れる。$\varepsilon = \frac{1}{m}$ として(2)を適用すると，$\delta = \frac{1}{n}$ が存在して $d(\overline{F(a)},\ K(x) \cap U(x:\frac{1}{m})^c) > \frac{1}{n}$，すると

$\overline{F(a)} \cap U(y : \frac{1}{m}+\frac{1}{n})^c \cap K(y) = \phi$ for all $y \in U(x:\frac{1}{n})$，特に

for all $y \in U(y:\frac{1}{n}) \cap K^{-}(x)$ となる。自然数 m と n は a が(1)の右辺の集合に属するように幾らでも大きく取ることができる.
従って, $\mathrm{dom}\,SF \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty}\{a \in A \mid \phi \neq K(d_i) \cap \overline{F(a)} \subset U(d_i:\frac{1}{n})\}$ であることがわかった。逆の包含関係は自明である。

補題6

K を閉凸錐とし, $F: A \to R^q$ を可測集合値関数とするとき, $\mathrm{dom}\,SF \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(R^q)$ となる。

証明 $\{d_i : i=1,2,\cdots\}$ を補題5の証明中のものと同じとしよう。すると $\mathrm{dom}\,SF = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{a \in A \mid (K+d_i) \cap \overline{F(a)} = \phi\}$ となる。従って $\mathrm{dom}\,SF \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(R^q)$ である。

5 eF の可測性

この§では主定理である定理8, 定理9, 定理10を述べる。これ等の定理では, もし $F: A \to R^q$ がコンパクト値可測多価関数のとき, それぞれ何等かの条件の下で, $Gr(eF) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(R^q)$ となること, $eF: A \to R^q$ が可測となること, $eF: A \to R^q$ が Souslin 型となること及び $eF: A \to R^q$ がボレル可測選択を持つことを示している。定理10は SF の可測性について述べた。

定理8

$F: A \to R^q$ をコンパクト値可測多価関数とする。このとき次の(1)から(4)までの結果が得られる。

(1) Kが閉集合もしくは開集合のとき $Gr(eF)\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^q)$

(2) Aが完備でKが閉または開集合のとき，$eF: A\to\mathbb{R}^q$ は可測

(3) $(A,\mathcal{A})$ がSouslin演算を許容し，Kが閉または開集合であるとき $eF: A\to\mathbb{R}^q$ はSouslin型である。

(4) $\mathcal{A}=\mathcal{B}(A)$ でAがポーランド空間のボレル集合で凸錐Kに対して開凸錐LでL⊃K，$L^*\cap(-L^*)=\{0\}$ をみたすものが取れるとき，$eF: A\to\mathbb{R}^q$ はボレル可測選択を持つ。

証明　(2)と(3)は(1)から定理6，定理7によって得られる。だから最初に(1)を証明して，次に(4)を証明しようと思う。
$X=\overline{\mathbb{R}^q}$ とおいておく。Kが開集合の場合には，補題3から
$Gr(eF)=Gr(F)\cap\{(a,x)\mid F(a)\cap K+x=\phi\}\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^q)$.
Kが閉集合の場合 $F_1: X\to C(X)$ を $\begin{cases}F_1(x)=\overline{K(x)},\ x\in\mathbb{R}^q\\ F_1(\infty)=\{\infty\}\end{cases}$ で定義し，
$F_2: A\times X\to C(X)$ を $F_2(a,x)=F_1(x)\cap\overline{F(a)}$ で定義すると定理2と補題2によって F_1 と F_2 はともに可測である。さらに，$F_3: X\to C(X)$ を $F_3(x)=\{x,\infty\}$ で定義して，$\Gamma: A\to X$ を $\Gamma(a)=eF(a)\cup\{\infty\}$ で定義する。そして最後に写像 Φ を次のように定義する。つまり $\Phi: A\times X\to C(X)\times C(X)$ を

$\Phi(a,x)=(F_2(a,x),\ F_3(x))$ で定義する訳である。

F_1, F_2, F_3, Γはすべて集合値関数なのにΦだけは写像として定義されていることに注意を要する。このとき次の関係が成立する。

(a) Δを積空間$C(X)\times C(X)$の対角集合として,

$$Gr(\Gamma)=\Phi^{-1}(\Delta),$$

(b) $$Gr(eF)=Gr(\Gamma)\cap A\times \mathbb{R}^{q}.$$

上の(a),(b)の関係式を証明する為に次の関係を得る。

$$
\begin{aligned}
Gr(\Gamma) &= \{(a,x)\in A\times X \mid x\in\Gamma(a)\} \\
&= \{(a,x)\in A\times \mathbb{R}^{q} \mid x\in\Gamma(a)\}\cup A\times\{\infty\} \\
&= \{(a,x)\in A\times \mathbb{R}^{q} \mid x\in eF(a)\}\cup A\times\{\infty\} \\
&= Gr(eF)\cup A\times\{\infty\}
\end{aligned}
$$

そして

$$
\begin{aligned}
\Phi^{-1}(\Delta) &= \{(a,x)\in A\times X \mid F_2(a,x)=F_3(x)\} \\
&= \{(a,x)\in A\times X \mid F_1(x)\cap\overline{F(a)}=\{x,\infty\}\} \\
&= \{(a,x)\in A\times \mathbb{R}^{q} \mid \overline{K(x)}^{\mathbb{R}^{q}}\cap F(a)=\{x\}\}\cup A\times\{\infty\} \\
&= Gr(eF)\cup A\times\{\infty\}.
\end{aligned}
$$

(a)と(b)はこの式からすぐにわかる。

最後に(4)を証明しよう。仮定から存在の保証されている閉凸錐Lに関するEの極大点集合を$e(L:E)$と書くことにする。すると補題4からすべての$a\in A$に対して$e(L:F(a))$はコンパクトとなり$Gr(e(L:F))\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^{q})$となることが(1)からわかる。従って定理5によって$e(L:F)$のボレル可測選択が存

在する。ところが$Gr(e(L:F))\subset Gr(eF)$であるから、それはeFのボレル可測選択になっている。これで定理の証明は完了した。

eFの可測性は定理8の(2)でAが完備のときに証明している。ところでベクトル値マルコフ決定過程やベクトル値最適停止問題への応用の際に、Aが完備だという仮定はかなり強過ぎる。これらへの応用に於ては$\mathcal{A}=\mathcal{B}(A)$であるような局面にしばしば出会う。$K$を閉集合と仮定すれば次の定理を得る。

定理9

Aをポーランド空間のボレル集合とし$\mathcal{A}=\mathcal{B}(A)$とし$K$を閉凸錐として$F:A\to\mathbb{R}^q$をコンパクト値可測多価関数とする。すると$eF:A\to\mathbb{R}^q$も可測である。

証明　定理の証明には次の補題が必要である。

補題7

定理9と同じ条件のもとで次の(3)式が成立する。

(3)　$Gr(\overline{eF})=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty}\{(a,x)\in A\times\mathbb{R}^q \mid \phi\neq K(x+d_{ni})\cap F(a)\subset U(x:\frac{1}{n})\}$

但し$\{d_k:k=1,2,\cdots\}$を$\mathbb{R}^q$の dense subset とし、各nに対して、$\{d_{nj}:j=1,2,\cdots\}=U(x:\frac{1}{n})\cap\{d_k:k=1,2,\cdots\}$とおいている。

補題7の証明　(3)の右辺の集合の元を任意に取る。すると任意のnに対して$i(n)$が存在して$\phi \neq K(x+d_{n i(n)}) \cap F(a) \subset U(x:\frac{1}{n})$をみたす。各々の$n$に対して$z_n \in K(x+d_{n i(n)}) \cap eF(a) \subset U(x:\frac{1}{n})$を選ぶことができる。すると$x=\lim_{n\to\infty} z_n$となるので$x \in \overline{eF(a)}$である。

逆に任意の$(a,x) \in Gr(\overline{eF})$を取ると$eF(a)$の点列$\{z_m : m=1,2,\cdots\}$が存在して$z_m \longrightarrow x$となる。ここで次の(4)をみたさないような$n_0$が存在すると仮定する。

(4)　$\phi \neq K(x+d_{n_0 i}) \cap F(a) \subset U(x:\frac{1}{n_0})$ for all i.

$z_l \in U(x:\frac{1}{2n_0})$を固定して考えることにする。今$K(x)$は内点を持っているので$\{d_{n_0 j} : j=1,2,\cdots\}$の部分列$\{d_{n_0 j_k} : k=1,2,\cdots\}$で$x+d_{n_0 j_k} \longrightarrow z_l$ as $k\to\infty$であってかつすべてのkに対して$x+d_{n_0 j_k} \underset{K}{\leqq} z_l$となるようなものが取れる。故にこの事実と(4)から次の(5)が成立することになる。

(5)　$\phi \neq F(a) \cap K(x+d_{n_0 j_k}) \not\subset U(x:\frac{1}{n_0})$ for all k

そこで点列$\{p_{j_k} : k=1,2,\cdots\}$を$p_{j_k} \in F(a) \cap K(x+d_{n_0 j_k}) \cap U(x:\frac{1}{n_0})^c$ととると$F(a)$がコンパクトであることから$\{p_{j_k} : k=1,2,\cdots\}$の収束部分列$\{p_{j_{k'}} : k'=1,2,\cdots\}$とその収束極限$p_0 \in F(a)$が存在する。すべての$k'$に対して$p_{j_{k'}}-(x+d_{n_0 j_{k'}}) \in K$だから$k' \to \infty$として$p_0 - z_l \in K$を得る。これは矛盾である。

さて定理9を証明する準備が出来た。各々の(n,i)に対して $\Lambda_1^{(n,i)}: A\times\mathbb{R}^q\to\mathbb{R}^q$ を $\Lambda_1^{(n,i)}(a,x)=K(x+d_{ni})\cap F(a)$ で定義し、$\Lambda_2^{(n,i)}: A\times\mathbb{R}^q\longrightarrow\mathbb{R}^q$ を $\Lambda_2^{(n,i)}(a,x)=K(x+d_{ni})\cap F(a)\cap U(x:\frac{1}{n})^c$ で定義する。すると各々の(n,i)に対して補題7と定理3と集合値関数 $x\longrightarrow U(x:\frac{1}{n})^c$ の可測性によって $\Lambda_1^{(n,i)}$ と $\Lambda_2^{(n,i)}$ は可測であることがわかる。故に $Gr(\overline{eF})$ を表現すると次式になるので、これは $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}(X)$ に属す。

$$Gr(\overline{eF})=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty}\left[\mathrm{dom}(\Lambda_1^{(n,i)})\cap\{A\times\mathbb{R}^q-\mathrm{dom}(\Lambda_2^{(n,i)})\}\right]。$$

従って[5]の中にある定理を使うと $\overline{eF}: A\to C(X)$ はボレル可測写像となっている。故に $eF: A\to X$、ひいては $eF: A\to\mathbb{R}^q$ が可測多価関数であることが定理2と定理4からわかる。以上で定理9の証明は終った。

もし $F: A\to\mathbb{R}^q$ が有界値可測なら、SF の可測性は定理8と定理9と同じように述べることができる。

ところで次の定理は SF のボレル可測選択の存在を扱ったものである。

定理10

A をポーランド空間のボレル集合とし K を閉凸錐とし、$F: A\to\mathbb{R}^q$ を可測多価関数とする。すると $\mathrm{dom}\,SF\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^q)$ でかつ $SF: \mathrm{dom}\,SF\longrightarrow\mathbb{R}^q$ はボレル可測選択を持つ。

証明　補題6から $\mathrm{dom}\, SF \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^q)$ であり，補題4から $SF(a)$ はすべての $a \in A$ に対して開集合であることがわかる。すると補題3から $Gr(SF) \in \mathcal{B}(\mathrm{dom}\, SF) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^q)$ となるので，定理5によって SF がボレル可測選択をもつことがわかる。

参考文献

[1] L. D. BROWN and R. PURVES, Measurable selections of extrema. Ann. Stat. Vol. 1. No. 5, 902–912 (1973).

[2] G. DEBREW, Integration of correspondences, Proc. fifth Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob. Vol. 2, No. 1, 351–372 (1965).

[3] N. FURUKAWA, Characterization of optimal policies in vector-valued Markov decision processes. Submitted to Math. Operations Reserch.

[4] C. J. HIMMELBERG, Measurable relations, Fund. Math. 87, 53–72 (1975).

[5] C. J. HIMMELBERG, T. PARTHASARATHY and F. S. VAN VLECK, Optimal plans for dynamic programming problems, Math. Operations. Research. Vol. 1. No. 4, 390–394 (1976).

[6] K. KURATOWSKI, Topology Vol 1, New Tork – London – Warszawa (1966).

[7] S. J. LEESE, Multifunction of Souslin type, Bull. Austral. Math. Soc., 11, 395–411 (1974).

[8] E. MICHAEL, Topologies on spaces of subsets, Trans. Amer. Math. Soc. 71, 152–182 (1951).

[9] R. T. ROCKAFELLAR, Measurable dependence of convex sets and functions on parameters, J. Math. Anal. Appl. 28, 4–25 (1969).